

Giovanni Lapelazzuli e Gunhild Stein

"I Numeri Aurei"

Alcune proprietà dei numeri Reali in
rappresentazione decimale

Indice

Premessa

Paragrafo 1 - Rappresentazione decimale dei numeri Reali

Paragrafo 2 - Il numero 'Compatto' di n

Paragrafo 3 - 'Il numero Aureo di n '

Paragrafo 4 - Funzione 'Compatto di n ' e funzione 'Numero Aureo di n '

Paragrafo 5 - Proprietà additive di $C(n)$ ed $A(n)$

Paragrafo 6 - Proprietà moltiplicativa di $A(n)$

Paragrafo 7 - Il 'Metodo' per il calcolo di $A(n)$

Paragrafo 8 - Significato del numero Aureo. Applicazione alle divisioni

Paragrafo 9 - Condizione necessaria e non sufficiente per i numeri primi

Paragrafo 10 - Generalizzazione ai numeri negativi

Appendice - Algebra lineare - Determinazione del Nucleo e dell'Immagine di una trasformazione lineare attraverso lo studio del comportamento del suo spazio di definizione.

Premessa.

Alcune delle proprietà dei numeri Reali che a seguire verranno esposte non saranno dimostrate. Molte di esse nascono da osservazioni della realtà e saranno ritenute valide fino a prova contraria.

La dimostrazione di tali proprietà richiede tempo e verrà affrontata in futuro; tuttavia, riteniamo che al momento sia più opportuno dedicarsi all'osservazione ed alla descrizione simbolica di tali proprietà e, lì dove possibile, alla descrizione delle possibili applicazioni pratiche.

Paragrafo 1

Rappresentazione decimale dei numeri Reali

La rappresentazione usuale dei numeri Reali e' detta 'decimale' perche' in essa i numeri Reali sono rappresentati mediante allineamenti, eventualmente con virgola, dei dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, detti cifre arabe o cifre decimali.

- Sia $m \in \mathbb{N}_0$, dove $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e siano $m_k, m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_0$ le cifre che lo compongono.

Si avra' che:

$$m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \dots m_0 = m_k 10^k + m_{k-1} 10^{k-1} + m_{k-2} 10^{k-2} + m_0 10^0$$

- Sia $m \in \mathbb{Q}$, dove \mathbb{Q} e' l'insieme dei numeri razionali, e siano $m_k, m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_0$ le cifre che compongono la sua parte intera e $c_1, c_2, c_3, \dots, c_z$ le cifre che compongono la sua parte decimale (o dopo la virgola).

Si avra' che:

$$m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \dots m_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z = m_k 10^k + m_{k-1} 10^{k-1} + m_{k-2} 10^{k-2} + m_0 10^0 + c_1/10 + c_2/10^2 + c_3/10^3 + \dots + c_z/10^z$$

Un allineamento decimale si dice periodico quando contiene un gruppo di cifre decimali che si ripete infinite volte.

Paragrafo 2

Il numero 'Compatto' di n

Consideriamo un numero n appartenente, per comodità, all'insieme N dei numeri naturali.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0$$

Definizione. Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi \mathbb{N}^+ , si definisce 'Numero compatto di n' o 'Compatto di n', e si indica con il simbolo C_n , il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi \mathbb{N}^+ ottenuto dalla somma delle cifre che compongono n.

$$C_n = n_k + n_{k-1} + n_{k-2} \dots + n_0 = \sum_{k=0}^k n_k \quad \text{con } C_n \in \mathbb{N}^+$$

L'assunzione che $n \in \mathbb{N}^+$ è fatta per semplicità di esposizione. Si può definire il Compatto di un qualsiasi numero reale $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definizione. Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali positivi $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, si definisce 'Numero compatto di n' o 'Compatto di n', e si indica con il simbolo C_n , il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi \mathbb{N}^+ ottenuto dalla somma delle cifre che compongono n.

$$n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z$$

$$C_n = n_k + n_{k-1} + \dots + n_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_z = \sum_{k=0}^k n_k + \sum_{z=0}^z c_z \quad \text{con } C_n \in \mathbb{N}^+$$

Definizione. Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali negativi $\mathbb{R}^- \setminus \{0\}$, si definisce 'Numero compatto di n ' o 'Compatto di n ', e si indica con il simbolo C_n , il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri naturali negativi \mathbb{N}^- pari all'opposto della somma delle cifre che compongono n .

$$n \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\} \Rightarrow -n_k n_{k-1} \dots n_0, c_1 c_2 \dots c_z = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z \cdot (-1)$$

$$C_n = (-1) \cdot (n_k + n_{k-1} + \dots + n_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_z) = - \sum_{k=0}^k n_k + \sum_{z=0}^z c_z \quad \text{con}$$

$$C_n \in \mathbb{N}^-$$

Definizione. Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si definisce 'Numero compatto quadro di n ' o 'Compatto quadro di n ', e si indica con il simbolo C_n^2 , il numero C_n^2 appartenente all'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} ottenuto dalla somma delle cifre che compongono il compatto C_n di n .

$$C_n^2 = C_{C_n} \quad (\text{Compatto quadro di } n)$$

Esempio

$$n = 4689523751238 \quad C_n = C_{4689523751238} = 63 \quad C_n^2 = C_{C_n} = C_{63} = 9$$

E' possibile definire, alla stessa maniera, il 'Compatto cubo di n ' o il 'Compatto alla quarta di n ' e cosi' via...

$$C_n^3 = C_{C_n^2} = C_{c_{c_n}} \quad (\text{Compatto cubo di } n)$$

Paragrafo 3

'Il numero Aureo di n'

Definizione. Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}-\{0\}$, si definisce 'Numero Aureo di n', e si indica con il simbolo A_n , il numero

C_n^x , con x tale $A_n \cdot \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A_n e' quindi il numero naturale compreso tra $[-9, 9]$ che si ottiene reiterando x volte l'operazione di 'compattazione' del numero n.

In letteratura A_n e' noto come funzione iterazione della somma delle cifre, e cioe' come numero compreso tra $[-9, 9]$ che si ottiene dalla iterazione della somma delle cifre che costituiscono un numero n (digit sum iteration function).

Queste definizioni sono equivalenti.

Ovviamente il compatto di un numero Aureo e' il numero Aureo stesso:

$$C_{A_n} = A_n$$

"x" e' quindi 'la potenza' a cui isogna elevare il Compatto C_n di n affinche' si ottenga un numero naturale compreso tra $[-9, 9]$.

Nell'esempio precedente (n= 4689523751238) il numero Aureo di n, A_n , e' pari a 9 e corrisponde al Compatto quadro di n. "x" e' quindi pari a 2.

Paragrafo 4

Funzione 'Compatto di n' e funzione 'Numero Aureo di n'

Considerato un numero reale $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il Compatto di n C_n ed il numero Aureo di n A_n appartengono al codominio di due funzioni, rispettivamente la funzione 'Compatto di n' e la funzione 'Numero Aureo di n'.

Definizione. Definiamo la funzione Compatto di n , quella funzione $C(n)$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tale che

$$\forall n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z$$

$$\text{Se } n > 0 \Rightarrow C(n) = C_n = \sum_{k=0}^k n_k + \sum_{z=0}^z c_z \quad \text{con } C_n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } n < 0 \Rightarrow C(n) = C_n = - \sum_{k=0}^k n_k + \sum_{z=0}^z c_z \quad \text{con } C_n \in \mathbb{N}$$

$C(n)$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e come codominio \mathbb{N} .

Definizione. Definiamo la funzione Numero Aureo di n , quella funzione $A(n)$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tale che

$$\forall n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z$$

$$A(n) = A_n = C_n^x$$

con $x \in A_n \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$C(n)$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e come codominio l'insieme finito $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Paragrafo 5

Proprieta' additive di C(n) ed A(n)

Si osserva ed e' valida la seguente

Proprieta' additiva della funzione C(n)

Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il compatto di n e' pari alla somma del compatto di m e del compatto di p, o differisce da tale somma di una quantita' pari ad un multiplo di 9 (9k).

$$\begin{aligned} \forall n, m, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = m + p \\ C_m + C_p = C_n + 9k \\ \text{Con } k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Proprieta' additiva della funzione C(n)

Esempi:

$$891 = 125 + 766$$

$$C_{891} = 9, C_{125} = 8, C_{766} = 19$$

$$C_{125} + C_{766} = 27 = C_{891} + 9k = 9 + 18$$

Con k=2

$$841 = 884 - 43$$

$$C_{841} = 13, C_{884} = 20, C_{-43} = -7$$

$$C_{884} + C_{-43} = 13 = C_{841} + 9k = 13 + 0$$

Con k=0

Si osservano e sono valide le seguenti

Proprieta' additive della funzione A(n)

1) Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il numero Aureo di n e' pari alla somma del numero Aureo di m e del numero Aureo di p meno di una quantita' pari ad un multiplo di 9 (9k).

$$\forall n, m, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = m + p$$

$$A_m + A_p = A_n + 9k$$

Con k $\in \mathbb{N}_0$

2) Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il numero Aureo di n e' pari al numero Aureo della somma dei numeri Aurei di m e di p .

$$\forall n, m, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = m + p$$
$$A_n = A_{(A_m + A_p)}$$

Proprieta' additiva della funzione $A(n)$

Paragrafo 6

Proprietà' moltiplicativa di $A(n)$

Si osserva ed è valida la seguente

Proprietà' moltiplicativa della funzione $A(n)$

Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) è pari al prodotto degli altri due (m e p), il numero Aureo di n è pari al numero Aureo del prodotto dei numeri Aurei di m e di p .

$$\forall n, m, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : n = m \cdot p$$
$$A_n = A_{(A_m \cdot A_p)}$$

Proprietà' additiva della funzione $A(n)$

Paragrafo 7

Il 'Metodo' per il calcolo di $A(n)$

Il calcolo del numero A_n per un numero molto "grande", e cioè composto da un numero elevato di cifre, richiederebbe secondo il metodo classico un numero molto elevato di addizioni, e quindi molto tempo. Inoltre, il calcolo A_n secondo un numero elevato ed una serie reiterata di addizioni si trasformerebbe in un algoritmo non banale da far elaborare ad un computer.

Esiste un metodo semplice e rapido per calcolare il numero Aureo A_n di un numero qualsivoglia grande.

Il 'Metodo' per i numeri Naturali

Considerato un numero n appartenente all'insieme N dei numeri Naturali $n \in N$, chiamiamo m il numero Reale $m \in R - \{0\}$ che si ottiene dividendo n per il numero naturale 9

$$m = \frac{n}{9}$$

Si avra' che

a) se $m \in N$ ($m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \dots m_0$) \Rightarrow $A_n = 9$

b) se $m \notin N$ ($m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \dots m_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z$) \Rightarrow $A_n = c_1$

Se n e' un multiplo di 9, il suo numero Aureo e' pari a 9; se n non e' un multiplo di 9 il suo numero Aureo e' pari alla prima cifra decimale del numero m ottenuto dividendo n per 9.

Esempio

$$n = 24537$$

$$m = 24537/9 = 2726,3$$

$$A_n = 3$$

E' possibile generalizzare all'insieme dei numeri Reali

Il 'Metodo' per i numeri Reali

Considerato un numero n appartenente all'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$ dei numeri Reali $n \in \mathbb{R} - \{0\}$, chiamiamo m il numero Reale $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ che si ottiene dividendo n per il numero naturale 9

$$m = \frac{n}{9}$$

Essendo $n \in \mathbb{R} - \{0\}$, n sara' composto da una parte intera ed una decimale

$$n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_z$$

Essendo anche $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, anche m sara' composto da una parte intera ed una decimale

$$m = m_x m_{x-1} m_{x-2} \dots m_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_y$$

Si avra' che

$$a) \text{ se } y=z \quad \Rightarrow \quad A_n = 9$$

$$b) \text{ se } y > z \quad \Rightarrow \quad A_n = b_{z+1}$$

Esempio

$$n = 24537,88$$

$$m = 24537,88/9 = 2726,431$$

$$A_n = 1$$

Paragrafo 8

Significato del numero Aureo.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n = A_n + 9 \cdot P \quad \text{con } P \in \mathbb{N}$$

Il numero Aureo di un numero Naturale n e' rappresenta la quantita' di numeri naturali che separa n dal multiplo di nove che lo precede.

Appendice – Algebra lineare

Determinazione del Nucleo e dell'Immagine di una trasformazione lineare attraverso lo studio del comportamento del suo spazio di definizione.

Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V .

Dal teorema "Nullità + Rango" si ha $\dim V = \dim N(f) + \dim \text{Im}(f)$

Ponendo $\dim V = n$, una qualsiasi base di V sarà costituita da n elementi.

Possiamo dimostrare il seguente teorema:

Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V . Se k elementi della base di uno spazio V hanno immagine nulla, k sarà la dimensione del Nucleo di f .

Dimostrazione

Il Nucleo di una trasformazione lineare f è un sottoinsieme dell'insieme di partenza V formato da elementi la cui immagine, secondo f , è nulla. Si dimostra che esso è un sottospazio.

Considerando k elementi della base di V che hanno immagine nulla, lo spazio lineare da essi generato avrà dimensione k , essendo questi elementi indipendenti. Si osservi che ogni elemento appartenente a questo spazio $L(k)$ può essere espresso nella forma $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_k \underline{e}_k$, dove $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ sono i k elementi finora considerati.

Si avrà, di conseguenza, $f(\underline{x}) = x_1 f(\underline{e}_1) + \dots + x_k f(\underline{e}_k) = 0$, essendo $f(\underline{e}_1) = \dots = f(\underline{e}_k) = 0$.

Da ciò segue che ogni elemento appartenente ad $L(k)$ ha immagine nulla: $L(k)$ è quindi incluso nel Nucleo di f . $L(k) \subseteq N(f)$

Gli altri $n-k$ elementi della base di V hanno immagine non nulla, perciò lo spazio da essi generato $L(n-k)$ è formato da elementi con immagine non nulla (escludendo, ovviamente, il vettore nullo).

Si dimostra facilmente che se $S = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$ è un insieme indipendente,

$L(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \cap L(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = 0$ insieme nullo, ed inoltre

$L(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) + L(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = L(S)$.

Si ha, quindi, che $L(k) \cap L(n-k) = 0$ insieme nullo, ed inoltre

$L(k) + L(n-k) = L(\text{base di } V) = V$

Da ciò si deduce che $L(k)$ è proprio il nucleo della trasformazione lineare f considerata.

Infatti, se fosse stato $L(k) = V$ rimaneva da verificare se gli elementi

rimasti fuori da $L(k)$ e comunque appartenenti a V avessero ancora immagine nulla. Essendo $L(k)$ e $L(n-k)$ due componenti o lacune di V , questi elementi 'rimasti fuori da $L(k)$ ' sono proprio quelli di $L(n-k)$. Siccome abbiamo già visto che questi elementi non hanno mai immagine nulla, possiamo concludere che gli elementi del nucleo di f sono tutti e soli gli elementi di $L(k)$, per cui $L(k) = N(f)$ e, di conseguenza, $\dim N(f) = k$.

c.v.d.

Osservazione.

La proprietà appena dimostrata può ricavarsi dal noto teorema dell' "Nullità + Rango"

In questa dimostrazione si parte da una base del Nucleo e si completa questa ad una base dello spazio di partenza. Il fatto che lo spazio generato da questi vettori indipendenti 'aggiunti' sia formato soltanto da vettori la cui immagine è non nulla è lasciato, però, all'intuizione del lettore.

La dimostrazione appena descritta raggiunge il suo scopo senza far riferimento alla "Nullità + Rango" ed, anzi, può considerarsi una ulteriore dimostrazione di questo teorema.