Giovanni Lapelazzuli

“I Numeri Aurei”

Alcune proprieta’ dei numeri Reali in rappresentazione decimale

1993, 2005, 2006, 2018

Indice

(2005-2006)

Premessa

Alcune delle proprieta′ dei numeri Reali che a seguire verranno esposte non saranno dimostrate. Molte di esse nascono da osservazioni della realta′ e saranno ritenute valide fino a prova contraria.
La dimostrazione di tali proprieta′ richiede tempo e verra′ affrontata in futuro; tuttavia, riteniamo cha al momento sia piu′ opportuno dedicarsi all'osservazione ed alla descrizione simbolica di tali proprieta′ e, li′ dove possibile, alla descrizione delle possibili applicazioni pratiche.

<u>Paragrafo 1</u>

Rappresentazione decimale dei numeri Reali

La rappresentazione usuale dei numeri Reali e' detta 'decimale' perche' in essa i numei Reali sono rappresentati mediante allineamenti, eventualmente con virgola, dei dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, detti cifre arabe o cifre decimali.

- Sia m Є N_0, dove N_0 = N U {0}, e siano m_k, m_{k-1}, m_{k-2}..... m_0 le cifre che lo compongono.
  Si avra' che:
  $m = m_k\ m_{k-1}\ m_{k-2}.....m_0 = m_k\ 10^k + \ m_{k-1}\ 10^{k-1} + m_{k-2}\ 10^{k-2} + m_0\ 10^0$

- Sia m Є Q, dove Q e' l'insieme dei numeri razionali, e siano m_k, m_{k-1}, m_{k-2}..... m_0 le cifre che compongono la sua parte intera e c_1, c_2, c_3.....c_z le cifre che compongono la sua parte decimale (o dopo la virgola).
  Si avra' che:
  $m = m_k\ m_{k-1}\ m_{k-2}.....m_{0,}\ c_1\ c_2\ c_3.....c_z = m_k\ 10^k + \ m_{k-1}\ 10^{k-1} + m_{k-2}\ 10^{k-2} + m_0\ 10^0 +$
  $c_1/10 + c_2/10^2 + c_3/10^3 +..... c_z/10^z$

Un allineamento decimale si dice periodico quando contiene un gruppo di cifre decimali che si ripete infinite volte.

<u>Paragrafo 2</u>

Il numero 'Compatto' di n

Consideriamo un numero n appartenente, per comodita', all'insieme N dei numeri naturali.

$n \in N \Longrightarrow n = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2} \ldots\ldots n_0$

<u>Definizione.</u> *Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi N^+, si definisce 'Numero compatto di n' o 'Compatto di n', e si indica con il simbolo* $\mathbf{C_n}$, *il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi N^+ ottenuto dalla somma delle cifre che compongono n.*

$$\mathbf{C_n} = n_k + n_{k-1} + n_{k-2} \ldots\ldots + n_0 = \sum_{k=0}^{k} n_k \quad \text{con } C_n \in N^+$$

L'assunzione che $n \in N^+$ e' fatta per semplicita' di esposizione. Si puo' definire il Compatto di un qualsiasi numero reale $n \in R-\{0\}$.

<u>Definizione.</u> *Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali positivi $R^+-\{0\}$, si definisce* ***'Numero compatto di n'*** *o* ***'Compatto di n'****, e si indica con il simbolo* $\mathbf{C_n}$, *il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri natural positivi* N^+ *ottenuto dalla somma delle cifre che compongono n.*

$n \in R^+-\{0\} \Longrightarrow n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2} \ldots\ldots n_0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots\ldots c_z$

$$\mathbf{C_n} = n_k + n_{k-1} + \ldots\ldots + n_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_z = \sum_{k=0}^{k} n_k + \sum_{z=0}^{z} c_z \quad \text{con } C_n \in N^+$$

<u>Definizione.</u> *Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali negativi $R^--\{0\}$, si definisce* ***'Numero compatto di n'*** *o* ***'Compatto di n'****, e si indica con il simbolo* $\mathbf{C_n}$, *il numero C_n appartenente all'insieme dei numeri natural negativi* N^- *pari all'opposto della somma delle cifre che compongono n.*

$n \in R^--\{0\} \Longrightarrow -n_k\, n_{k-1} \ldots\ldots n_0, c_1\, c_2 \ldots\ldots c_z = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2} \ldots\ldots n_0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots\ldots c_z * (-1)$

$$\mathbf{C_n} = (-1) * (n_k + n_{k-1} + \ldots + n_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_z) = -\sum_{k=0}^{k} n_k + \sum_{z=0}^{z} c_z \quad \text{con } C_n \in N^-$$

Definizione. *Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali R-{0}, si definisce **'Numero compatto quadro di n'** o **'Compatto quadro di n'**, e si indica con il simbolo C_n^2, il numero C_n^2 appartenente all'insieme dei numeri naturali N ottenuto dalla somma delle cifre che compongono il compatto C_n di n.*

$C_n^2 = C_{C_n}$ (Compatto quadro di n)

Esempio

n= 4689523751238 $C_n = C_{4689523751238} = 63$ - $C_n^2 = C_{C_n} = C_{63} = 9$

E'possibile definire, alla stessa maniera, il 'Compatto cubo di n' o il 'Compatto alla quarta di n' e cosi' via...

$C_n^3 = C_{C_n^2} = C_{C_{C_n}}$ (Compatto cubo di n)

<u>Paragrafo 3</u>

'Il numero Aureo di n'

<u>Definizione.</u> *Considerato un numero n appartenente all'insieme dei numeri reali R-{0}, si definisce* ***'Numero Aureodi n'****, e si indica con il simbolo* A_n*, il numero*

C_n^x*, con x tale* $A_n \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A_n e' quindi il numero naturale compreso tra [-9, 9] che si ottiene reiterando x volte l'operazione di 'compattazione' del numero n.
In letteratura A_n e' noto come funzione iterazione della somma delle cifre, e cioe' come numero compreso tra [-9, 9] che si ottiene dalla iterazione della somma delle cifre che costituiscono un numero n (*digit sum iteration function*).
Queste definizioni sono equivalenti.

Ovviamente il compatto di un numero Aureo e' il numero Aureo stesso:

$$C_{A_n} = A_n$$

"**x**" e' quindi 'la potenza' a cui isogna elevare il Compatto C_n di n affinche' si ottenga un numero naturale compreso tra [-9, 9].
Nell'esempio precedente (n= 4689523751238) il numero Aureo di n, A_n, e' pari a 9 e corrisponde al Compatto quadro di n. "x" e' quindi pari a 2.

Paragrafo 4

Funzione 'Compatto di n' e funzione 'Numero Aureo di n'

Considerato un numero reale n ∈ R-{0}, il Compatto di n $\mathbf{C_n}$ ed il numero Aureo di n A_n appartengono al codominio di due funzioni, rispettivamente la funzione 'Compatto di n' e la funzione 'Numero Aureo di n'.

Definizione. *Definiamo la **funzione Compatto di n**, quella funzione C(n) definita in R-{0}, tale che*

$\forall\ n \in R\text{-}\{0\} : n = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2}.....n_{0,}\, c_1\, c_2\, c_3.....c_z$

Se $n>0 \Rightarrow C(n) = C_n = \sum_{k=0}^{k} n_k + \sum_{z=0}^{z} c_z$ *con* $C_n \in N$

Se $n<0 \Rightarrow C(n) = C_n = -\sum_{k=0}^{k} n_k + \sum_{z=0}^{z} c_z$ *con* $C_n \in N^-$

C(n) ha come dominio R-{0} e come codominio N.

Definizione. *Definiamo **la funzione Numero Aureo di n**, quella funzione A(n) definita in R-{0}, tale che*

$\forall\ n \in R\text{-}\{0\} : n = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2}.....n_{0,}\, c_1\, c_2\, c_3.....c_z$

$A(n) = A_n = C_n^x$

con x : A_n ∈ {-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

C(n) ha come dominio R-{0} e come codominio l'insieme finito {-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Paragrafo 5

Proprieta' additive di C(n) ed A(n)

Si osserva ed e' valida la seguente
Proprieta' additiva della funzione C(n)

Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il compatto di n e' pari alla somma del compatto di m e del compatto di p, o differisce da tale somma di una quantita' pari ad un multiplo di 9 (9k).

$\forall\ n, m, p \in R\text{-}\{0\}:\ n = m + p$ $C_m + C_p = C_n + 9k$ Con $k \in N_0$

Proprieta' additiva della funzione C(n)

Esempi:
891 = 125 + 766
$C_{891} = 9$, $C_{128} = 8$, $C_{766} = 19$
$C_{128} + C_{766} = 27 = C_{891} + 9k = 9 + 18$
Con k=2

841 = 884 – 43
$C_{841} = 13$, $C_{884} = 20$, $C_{-43} = -7$
$C_{884} + C_{-43} = 13 = C_{841} + 9k = 13 + 0$
Con k=0

Si osservano e sono valide le seguenti
Proprieta' additive della funzione A(n)

1) Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il numero Aureo di n e' pari alla somma del numero Aureo di m e del numero Aureo di pa meno di una quantita' pari ad un multiplo di 9 (9k).

$\forall\ n, m, p \in R\text{-}\{0\}:\ n = m + p$
$A_m + A_p = A_n + 9k$
Con $k \in N_0$

2) Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari alla somma degli altri due (m e p), il numero Aureo di n e' pari al numero Aureo della somma dei numeri Aurei di m e di p.

$\forall\ n, m, p \in R\text{-}\{0\}:\ n = m + p$ $A_n = A_{(A_m + A_p)}$

Proprieta' additiva della funzione A(n)

Paragrafo 6

Proprieta' moltiplicativa di A(n)

Si osserva ed e' valida la seguente
Proprieta' moltiplicatica della funzione A(n)

Considerati 3 numeri reali n, m, p tali che uno (n) e' pari al prodotto degli altri due (m e p), il numero Aureo di n e' pari al numero Aureo del prodotto dei numeri Aurei di m e di p.

$\forall\ n, m, p \in R-\{0\} :\ n = m \cdot p$

$A_n = A_{(A_m \bullet A_p)}$

Proprieta' additiva della funzione A(n)

Paragrafo 7

Il 'Metodo' per il calcolo di A(n)

Il calcolo del numero A_n per un numero molto "grande", e cioe' composto da un numero elevato di cifre, richiederebbe secondo il metodo classico un numero molto elevato di addizioni, e quindi molto tempo. Inoltre, il calcolo A_n secondo un numero elevato ed una serie reiterata di addizioni si trasformerebbe in un algoritmo non banale da far eleborare ad un computer.
Esiste un metodo semplice e rapido per calcolare il numero Aureo A_n di un numero qualsivoglia grande.

Il 'Metodo' per i numeri Naturali

Considerato un numero n appartenente all'insieme N dei numeri Naturali $n \in N$, chiamiamo m il numero Reale $m \in R$-{0} che si ottiene dividendo n per il numero naturale 9

$$m = \frac{n}{9}$$

Si avra' che

a) se $m \in N$ $(m = m_k\, m_{k-1}\, m_{k-2}.....m_0)$ $\Rightarrow$ $A_n = 9$

b) se $m \notin N$ $(m = m_k\, m_{k-1}\, m_{k-2}.....m_0, c_1\, c_2\, c_3.....c_z)$ $\Rightarrow$ $A_n = c_1$

Se n e' un multiplo di 9, il suo numero Aureo e' pari a 9; se n non e' un multiplo di 9 il suo numero Aureo e' pari alla prima cifra decimale del numero m ottenuto divedendo n per 9.

Esempio
n = 24537
m = 24537/9 = 2726,3
An = 3

E' possibile generalizzare all'insieme dei numeri Reali

<u>Il 'Metodo' per i numeri Reali</u>

Considerato un numero n appartenente all'insieme R-{0} dei numeri Reali $n \in R-\{0\}$, chiamiamo m il numero Reale $m \in R-\{0\}$ che si ottiene dividendo n per il numero naturale 9

$$m = \frac{n}{9}$$

Essendo $n \in R-\{0\}$, n sara' composto da una parte intera ed una decimale

$n = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2} \ldots n_0,\, c_1\, c_2\, c_3 \ldots c_z$

Essendo anche $m \in R-\{0\}$, anche m sara' composto da una parte intera ed una decimale

$m = m_x\, m_{x-1} m_{x-2} \ldots m_0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_y$

Si avra' che

a) se $y=z \quad \Rightarrow \qquad A_n = 9$

b) se $y>z \quad \Rightarrow \qquad A_n = b_{z+1}$

Esempio

n = 24537,88

m = 24537,88/9 = 2726,431

An = 1

<u>**Paragrafo 8**</u>

Significato del numero Aureo.

$$\forall n \in N \quad n = A_n + 9 \cdot P \text{ con } P \in N$$

Il numero Aureo di un numero Naturale n e' rappresenta la quantita' di numeri naturali che separa n dal multiplo di nove che lo precede.

..."Possiamo dire che An e' il modulo di n in base 9?"

(2018)

$\frac{n}{9} = \frac{A_n}{9} + P$

$P \in N \implies \left(\frac{n}{9} - \frac{A_n}{9}\right) \in N$

Siccome $\frac{n}{9} \in R$, $P \in N$
ed $\frac{n}{9} = \frac{A_n}{9} + P$
ne consegue che $\boldsymbol{\frac{A_n}{9}}$ ***, se diverso da 1, e' la parte decimale del numeo Reale*** $\boldsymbol{\frac{n}{9} \in R}$

Il numero Reale $\frac{n}{9} \in R$ sara' dato dalla soma del un numero Naturale $P \in N$ e del un numero Reale $\frac{A_n}{9} \in R$

Restando per semplicita' espositiva nell'ambito dei numeri positivi, siccome An e' un numero Naturale compreso tra i numeri 1 e 9 [1, 9]:

- $A_n = 1 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{1}$
- $A_n = 2 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{2}$
- $A_n = 3 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{3}$
- $A_n = 4 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{4}$
- $A_n = 5 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{5}$
- $A_n = 6 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{6}$
- $A_n = 7 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{7}$
- $A_n = 8 \implies \frac{A_n}{9} = 0,\bar{8}$
- $A_n = 9 \implies \frac{A_n}{9} = 1$ **se il numero Aureo di *n An* e' pari a 9,** $\frac{A_n}{9}$ e' pari a 1. ***n* e' un multiplo di 9**

Il rapporto tra un numero Naturale ***n*** ed il numero naturale 9 e'un numero Reale $\frac{n}{9}$ che :

- appartiene all'insieme N dei numeri naturali se ***n* e' un multiplo di 9 .** Il numero Aureo di ***n An* e' pari a 9**
- appartiene all'insieme numerico R-N (numeri Reali esclusi i numeri Naturali), che ha come parte decimale il numero periodico $\overline{N_n}$ dove N_n = ***An* e' il numero Aureo di n**

Questo dimostra anche il metodo per il calcolo di An di cui al Paragrafo 7

(1993)

Appendice – Algebra lineare
Determinazione del Nucleo e dell'Immagine di una trasformazione lineare attraverso lo studio del comportamento del suo spazio di definizione.

Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V.
Dal teorema "Nullita' + Rango" si ha dim V = dim N(f) + dim Im(f)
Ponendo dim V = n, una qualiasi base di V sara' costituita da n elementi.
Possiamo dimostrare il seguente teorema:
Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V. Se k elementi della base di uno spazio V hanno immagine nulla, k sara' la dimensione del Nucleo di f.

Dimostrazione
Il Nucleo di una trasformazione lineare f e' un sottoinsieme dell'insieme di partenza V formato da elementi la cui immagine, secondo f, e' nulla. Si dimostra che esso e' un sottospazio.
Considerando k elementi della base di V che hanno immagine nulla, lo spazio lineare da essi generato avra' dimensione k, essendo questi elementi indipendenti. Si osservi che ogni elemento appartenente a questo spazio L(k) puo' essere espresso nella forma $\underline{x}$=x1$\underline{e}$1+...+xk$\underline{e}$k, dove $\underline{e}$1...$\underline{e}$k sono i k elementi finora considerati.
Si avra', di conseguenza, f($\underline{x}$) = x1f($\underline{e}$1)+...+xnf($\underline{e}$k) = 0, essendo f($\underline{e}$1) = ... = f($\underline{e}$k) = 0.
Da cio' segue che ogni elemento appartenente ad L(k) ha immagine nulla: L(k) e' quindi incluso nel Nucleo di f. L(k)=N(f)
Gli altri n-k elementi della base di V hanno immagine non nulla, percui lo spazio da essi generato L(n-k) e' formato da elementi con immagine non nulla (escludendo, ovviamente, il vettore nullo).
Si dimostra facilmente che se S = ($\underline{e}$1,...,$\underline{e}$n, $\underline{w}$1,...,$\underline{w}$n) e' un insieme indipendente,
L($\underline{e}$1,...,$\underline{e}$n)nL($\underline{w}$1...$\underline{w}$n) = 0 insieme nullo, ed inoltre L($\underline{e}$1,...,$\underline{e}$n)+L($\underline{w}$1...$\underline{w}$n) = L(S).
Si ha, quindi, che L(k)nL(n-k) = 0 insieme nullo, ed inoltre
L(k)+L(n-k) = L(base di V) = V
Da cio' si deduce che L(k) e' proprio il nucleo della trasformazione lineare f considerata.
Infatti, se fosse stato L(k)=V rimaneva da verificare se gli elementi rimasti fuori da L(k) e comunque appartenenti a V avessero ancora immagine nulla. Essendo L(k) e L(n-k) due componenti o lacune di V, questi elementi 'rimasti fuori da L(k)' sono proprio quelli di L(n-k).
Siccome abbiamo gia' visto che questi elementi non hanno mai immagine nulla, possiamo concludere che gli elementi del nucleo di f sono tutti e soli gli elementi di L(k), percui L(k)=N(f) e, di conseguenza, dimN(f) = k.
c.v.d.
Osservazione.
La proprieta' appena dimostrata puo' ricavarsi dal noto torema dell "Nullita' + Rango"
In questa dimostrazione si parte da una base del Nucleo e si completa questa ad una base dello spazio di partenza. Il fatto che lo spazio generato da questi vettori indipendenti 'aggiunti' sia formato soltanto da vettori la cui immagine e' non nulla e' lasciato, pero', all'intuizione del lettore.
La dimostrazione appena descritta raggiunge il suo scopo senza far riferiemnto alla "Nullita' + Rango" ed, anzi, puo' considerarsi una ulteriore dimostrazione di questo teorema.