

Author of the proof : Giovanni Lapelazzuli
Year 1993

The following lines describe a property of a Linear Transformation, which I found and demonstrated during the University years (1993).

First we start with defining what we're talking about...

Let A be a linear transformation of the vector space U into the vector space V .

The collection of all those vectors x in U such that $Ax = 0$ is called the kernel of A and is denoted by $\ker(A)$.

The collection $A(U)$ of all those vectors y in V for which there exists some vector x in U so that $A(x)=y$ is called the range of A and is denoted by $\text{range}(A)$. The following property is important and can be demonstrated: (Dimension of kernel of A) + (dimension of range of A) = (dimension of U).

Then we come to what we want to demonstrate...

"Why it is possible to determine the Kernel and the Range of a Linear Transformation studying the behaviour of a base of the space of definition."

I'll now go more in depth using Italian language, which i'm more used to for technical stuff. Next days i'll translate all in English.

Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V .

Dal teorema "Nullita' + Rango" si ha $\dim V = \dim N(f) + \dim \text{Im}(f)$

Ponendo $\dim V = n$, una qualsiasi base di V sara' costituita da n elementi.

Possiamo dimostrare il seguente teorema:

Sia f una trasformazione lineare definita nello spazio V . Se k elementi della base di uno spazio V hanno immagine nulla, k sara' la dimensione del Nucleo di f .

Dimostrazione

Il Nucleo di una trasformazione lineare f e' un sottoinsieme dell'insieme di partenza V formato da elementi la cui immagine, secondo f , e' nulla. Si dimostra che esso e' un sottospazio.

Considerando k elementi della base di V che hanno immagine nulla, lo spazio lineare da essi generato avra' dimensione k , essendo questi elementi indipendenti. Si osservi che ogni elemento appartenente a questo spazio $L(k)$ puo' essere espresso nella forma $x = x_1e_1 + \dots + x_k e_k$, dove $e_1 \dots e_k$ sono i k elementi finora considerati.

Si avra', di conseguenza, $f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_k f(e_k) = 0$, essendo $f(e_1) = \dots = f(e_k) = 0$.

Da cio' segue che ogni elemento appartenente ad $L(k)$ ha immagine nulla: $L(k)$ e' quindi incluso nel Nucleo di f .

$L(k) \subseteq N(f)$

Gli altri $n-k$ elementi della base di V hanno immagine non nulla, per cui lo spazio da essi generato $L(n-k)$ e' formato da elementi con immagine non nulla (escludendo, ovviamente, il vettore nullo).

Si dimostra facilmente che se $S = (e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_n)$ e' un insieme indipendente,

$L(e_1, \dots, e_n) \cap L(w_1, \dots, w_n) = 0$ insieme nullo, ed inoltre $L(e_1, \dots, e_n) + L(w_1, \dots, w_n) = L(S)$.

Si ha, quindi, che $L(k) \cap L(n-k) = 0$ insieme nullo, ed inoltre

$L(k) + L(n-k) = L(\text{base di } V) = V$

Da cio' si deduce che $L(k)$ e' proprio il nucleo della trasformazione lineare f considerata.

Infatti, se fosse stato $L(k) \subsetneq V$ rimaneva da verificare se gli elementi rimasti fuori da $L(k)$ e comunque appartenenti a V avessero ancora immagine nulla. Essendo $L(k)$ e $L(n-k)$ due componenti o lacune di V , questi elementi 'rimasti fuori da $L(k)$ ' sono proprio quelli di $L(n-k)$. Siccome abbiamo gia' visto che questi elementi non hanno mai immagine nulla, possiamo concludere che gli elementi del nucleo di f sono tutti e soli gli elementi di $L(k)$, per cui $L(k) = N(f)$ e, di conseguenza, $\dim N(f) = k$.

c.v.d.

Osservazione.

La proprieta' appena dimostrata puo' ricavarsi dal noto teorema dell'"Nullita' + Rango"

In questa dimostrazione si parte da una base del Nucleo e si completa questa ad una base dello spazio di partenza. Il fatto che lo spazio generato da questi vettori indipendenti 'aggiunti' sia formato soltanto da vettori la cui immagine e' non nulla e' lasciato, pero', all'intuizione del lettore.

La dimostrazione appena descritta raggiunge il suo scopo senza far riferimento alla "Nullita' + Rango" ed, anzi, puo' considerarsi una ulteriore dimostrazione di questo teorema.